

MANIPULATION DES ENTIERS POSITIFS EN BASE 2

Objectifs :

- Savoir additionner et multiplier deux entiers positifs en base 2
- Savoir évaluer le nombre de bits nécessaire à l'écriture d'un entier positif en base 2

1 Ajouter et multiplier des entiers naturels en base 2

Après avoir abordé la question de la représentation des nombres en base 2, en « revisitant » le système de numération de position en base 10 appris à l'école primaire, nous allons essayer de nous rappeler des techniques pour poser additions et multiplications. En effet, les additions et les multiplications se posent en base 2 de la même manière qu'en base 10 !

Exemple d'addition

Pour effectuer $(101)_2 + (1101)_2$, on pose :

$$\begin{array}{rcccc} & & 1 & & 1 \\ & & & 1 & 0 & 1 \\ + & & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Vérification :

$$(101)_2 + (1101)_2 = 5 + 13 = 18 = (10010)_2$$

Exemple de multiplication

Pour effectuer $(1110)_2 \times (101)_2$, on pose :

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 & & & \times & & 1 & 0 & 1 \\
 \textcolor{teal}{1} & \textcolor{teal}{1} & & & & & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 + & & & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\
 + & & 1 & 1 & 1 & 0 & . & . \\
 \hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
 \end{array}$$

Vérification :

$$(1110)_2 \times (101)_2 = 14 \times 5 = 70 = (1000110)_2$$

Travail à faire Calcule la somme $(1011)_2 + (11)_2$ et le produit $(110)_2 \times (100)_2$. Vérifie ensuite tes résultats en repassant par la base décimale.

2 Nombre de bits nécessaires à une écriture binaire

Nous avons vu que les chiffres binaires 0 et 1, ou *binary digits* contracté en *bits* en anglais, sont les deux symboles permettant de représenter les nombres en écriture binaire. Nous nous intéressons maintenant au nombre de chiffres, ou nombre de *bits*, minimum qui doivent être utilisés pour écrire un nombre en base 2.

2.1 Nombre de bits nécessaires pour écrire un entier naturel

On donne la représentation binaire des nombres suivants :

$$\begin{aligned} 63 &= 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= (111111)_2 \\ 127 &= 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= (1111111)_2 \\ 255 &= 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= (11111111)_2 \end{aligned}$$

Travail à faire

1. Observe bien le nombre de bits utilisés pour écrire chacun de ces nombres puis essaie de compléter la propriété suivante :

Un entier naturel N s'écrit avec au plus k bits significatifs si et seulement si $N < 2^k$.

2. En remarquant que $63 = 2^6 - 1$, $127 = 2^7 - 1$ et $255 = 2^8 - 1$, déterminer la valeur du grand entier pouvant s'écrire avec 32 bits. Et avec 64 bits?

2.2 Nombre de bits nécessaires pour écrire une somme

On considère la propriété mathématique suivante :

Ajouter deux entiers naturels ayant au plus k bits significatifs en nécessite au plus $k + 1$.

1. Vérifie cette propriété en posant l'addition $63 + 127$ comme vu dans la première partie.
2. Soit deux entiers naturels n et m ayant au plus k bits significatifs. Démontre cette propriété à l'aide de celle établie dans la partie 2.1.
3. En considérant que les entiers n et m possèdent respectivement 4 et 5 bits dans leur écriture binaire.
 - (a) Quel est le nombre maximal de bits significatifs nécessaire pour écrire $n + m$?
 - (b) Supposons que $n = (1111)_2$. Peux-tu trouver un nombre m tel que l'écriture binaire de $n + m$ nécessite 5 bits ?
 - (c) Supposons que $m = (11000)_2$. Peux-tu trouver un nombre n tel que l'écriture binaire de $n + m$ nécessite 5 bits ?
4. Détermine le nombre de bits nécessaires à l'écriture en base de la somme $n + m$ dans les cas suivants :
 - (a) $n = 12$ et $m = 7$
 - (b) $n = (1011)_2$ et $m = (11100)_2$

2.3 Nombre de bits nécessaires pour écrire un produit

On considère la propriété mathématique suivante :

Multiplier deux entiers naturels n et m ayant respectivement au plus k et l bits significatifs en nécessite au plus $k + l$.

1. Vérifie cette propriété à partir de l'écriture binaire du produit 15×31 .
2. Comment peux-tu réutiliser une nouvelle fois la conclusion de la question 2. de la partie 2.1. pour démontrer ce résultat.
3. En considérant que les entiers n et m possèdent respectivement 4 et 5 bits dans leur écriture binaire.
 - (a) Quel est le nombre maximal de bits significatifs nécessaire pour écrire $n \times m$?
 - (b) Supposons que $n = (10101)_2$. Quel est le nombre minimal de bits pour l'écriture binaire de $n \times m$?
4. Détermine le nombre de bits nécessaires à l'écriture en base de la somme $n \times m$ dans les cas suivants :
 - (a) $n = 12$ et $m = 7$
 - (b) $n = (1011)_2$ et $m = (11100)_2$