

Représentation des données : types et valeurs de base

Encodage des entiers naturels

J. Boucher

Lycée Pierre-Paul RIQUET, Première NSI

22 novembre 2024

Plan

- 1 I. Représentation des entiers naturels
 - 1. Écriture des entiers naturels dans une base
 - 2. Encodage des entiers naturels en mémoire

1. Écriture des entiers positifs dans une base

Décomposition d'un entiers naturels dans une base $b \geq 2$

Tout entier naturel N peut se **décomposer** de manière **unique** dans une base $b \geq 2$ sous la forme d'une **somme des puissances de la base**, où chacun des termes est **pondéré par un coefficient** compris entre 0 et b exclu.

Spé. Maths :

$$N = a_n \times b^n + a_{n-1} \times b^{n-1} + \dots + a_1 \times b^1 + a_0 \times b^0$$

avec $n, a_i \in \mathbb{N}$ et $0 \leq a_i < b$.

1. Écriture des entiers positifs dans une base

Exemple de décomposition pour $b=10$, $b=2$ et $b=16$

- en base 10, dite **décimale** : $2024 = 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 4 \times 10^0$
- en base 2, dite **binaire** :

$$\begin{aligned}
 2024 &= 1 \times 2^{10} + 1 \times 2^9 + 1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 \\
 &\quad + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \\
 &= (11111011110)_2
 \end{aligned}$$

- en base 16, dite **hexadécimale** :

$$2024 = \dots \times 16^{\dots} + \dots \times 16^{\dots} + \dots \times 16^{\dots}$$

1. Écriture des entiers positifs dans une base

Exemple de décomposition pour $b=10$, $b=2$ et $b=16$

- en base 10, dite **décimale** : $2024 = 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 4 \times 10^0$
- en base 2, dite **binaire** :

$$\begin{aligned} 2024 &= 1 \times 2^{10} + 1 \times 2^9 + 1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 \\ &\quad + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \\ &= (11111011110)_2 \end{aligned}$$

- en base 16, dite **hexadécimale** :

$$\begin{aligned} 2024 &= 7 \times 16^2 + 14 \times 16^1 + 8 \times 16^0 \\ &= (7E8)_{16} \end{aligned}$$

La base 16 possède 16 chiffres ; 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F permettant d'écrire les nombres de 0 à 15.

Algorithme de décomposition d'un entier N dans une base b

Encodage(N , b)

Données : un entier naturel N et une base b telle que $b \geq 2$

Résultat : écriture renversée de N dans la base b

```

1 Entier naturel q, r, i
2 q ← N
3 r ← 0
4 i ← 0
5 tant que q > 0
6   | r ← q % b
7   | q ← q // b
8   | i ← i + 1
9   | afficher(r)

```

On effectue les divisions successives du quotient q par b pour obtenir à chaque division le coefficient a_i de la puissance b^i , i commençant à 0.

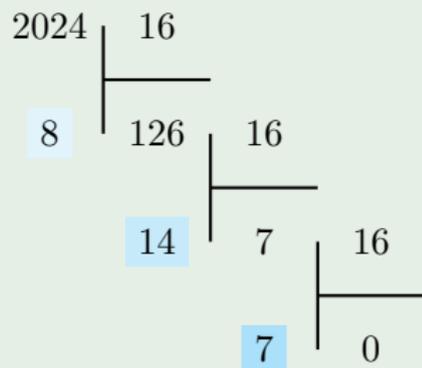
Autrement dit, à chaque tour de boucle, on obtient le « chiffre » suivant qui nous permettra d'écrire le nombre dans la base b . On dit que l'on a **encodé** N en base b .



Encodage de 2024 en base 16

Trace d'exécution de Encodage(2024, 16)

q	2024	126	7	0
r	0	8	14	7
i	0	1	2	3



$$\begin{aligned}
 2024 &= 126 \times 16 + 8 && i=1 \\
 &= (7 \times 16 + 14) \times 16 + 8 && i=2 \\
 &= ((0 \times 16 + 7) \times 16 + 14) \times 16 + 8 && i=3 \\
 &= 7 \times 16^2 + 14 \times 16^1 + 8 \times 16^0 \\
 &= (7 \text{ E } 8)_{16}
 \end{aligned}$$

2. Encodage des entiers naturels en mémoire

- Dans un ordinateur, toutes les informations sont représentées à l'aide des **chiffres binaires**, ou *binary digits* (contracté en bits), 0 et 1.
- Dans la mémoire d'un ordinateur, ces chiffres binaires sont regroupés en paquet de 8 bits, les **octets**.

Encodage de l'entier 75 en mémoire

séquence	0	1	0	0	1	1	0	1
positions	7	6	5	4	3	2	1	0
poids	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

La séquence de 8 bits 01001101 est l'encodage binaire de l'entier

$$75 = 0 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0.$$

- Une séquence de k bits permet de représenter les entiers de 0 à $2^k - 1$.

Par exemple, une séquence de 32 bits, ou 4 octets, permet de représenter tous les entiers naturels de 0 à $4\,294\,967\,295$.

$$2^{32} - 1$$

Nombre de bits nécessaire à l'encodage d'un entiers naturels

Un entier naturel N s'écrit avec au plus k bits significatifs si et seulement si $N < 2^k$.

Exemple

Soit $n = 53$.

On a $53 < 2^6$. Il faudra donc au plus 6 bits pour représenter 53 en base 2.

Nombre de bits nécessaire à l'encodage d'une somme d'entiers naturels

Ajouter deux entiers naturels ayant au plus k bits significatifs en nécessite au plus $k + 1$.

Exemple

Soit $n = 53$ et $m = 101$.

On a $53 < 2^6$ et $101 < 2^7$. Il faudra donc au plus $7 + 1$ bits pour représenter $53 + 101$ en base 2.

Nombre de bits nécessaire à l'encodage d'un produit d'entiers naturels

Multiplier deux entiers naturels n et m ayant respectivement au plus k et l bits significatifs en nécessite au plus $k + l$.

Exemple

Soit $n = 53$ et $m = 101$.

On a $53 < 2^6$ et $101 < 2^7$. Il faudra donc au plus $6 + 7$ bits pour représenter 53×101 en base 2.