
LA TOUR D'HANOÏ

Objectifs

- Représenter un algorithme récursif par un arbre,
- Effectuer une analyse de complexité temporelle d'un algorithme récursif,
- Implémenter un algorithme récursif en Python.

Problématique La « Tour d'Hanoï » est un jeu imaginé par le mathématicien français Édouard Lucas (1842-1891), qu'il publia dans « *Récréations mathématiques* », dont l'extrait est fourni en annexe. Après avoir décrit les règles du jeu, il fournit une analyse de la complexité temporelle de l'algorithme récursif de résolution du problème. On peut y lire :

À un coup par seconde, il faut plus de quatre minutes pour déplacer la tour de huit étages. Pour exécuter le transport de la tour d'Hanoï à soixante-quatre étages, conformément aux règles du jeu, il faudrait un nombre de déplacements égal à

18 446 744 073 709 551 615 ;

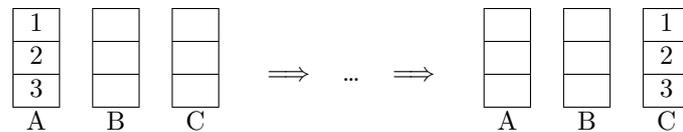
ce qui exigerait plus de cinq milliards de siècles !

À travers cette activité, on se propose de comprendre l'analyse que nous livre Édouard Lucas. Après avoir expérimenté son jeu sur des cas simples, ce qui te permettra de bien appréhender la solution récursive au problème, tu mettras en œuvre son implémentation dans un programme Python.

1. Après avoir lu les règles détaillées dans l'extrait en annexe, trouve la solution en jouant tout d'abord avec 1 étage, puis 2 étages, puis 3 étages.

Tu détailleras toutes les étapes en représentant chacun des piquets *A*, *B* et *C*, par un tableau à *n* lignes, avec *n* le nombre d'étages et où les étages sont représentés par des nombres ordonnés selon leur taille.

Par exemple, pour trois étages ($n = 3$) :



2. À partir de l'exemple donné par Édouard Lucas dans sa publication, formule les 3 étapes de la solution récursive pour déplacer *n* étages.
3. On nomme **déplacer**(*n*, **départ**, **intermédiaire**, **arrivée**) l'algorithme permettant de déplacer les *n* étages supérieurs du piquet **départ** vers le piquet **arrivée** en se servant du piquet **intermédiaire**.

Par exemple, l'instance **déplacer**(2, "B", "C", "A") de cet algorithme signifie qu'il faut déplacer les 2 étages supérieurs du piquet "B" vers le piquet "A" en se servant du piquet "C" comme piquet intermédiaire.

- (a) Reformule la solution de la question 2. en te servant de cet algorithme.
 - (b) Représente sous la forme d'un arbre l'instance **déplacer**(3, "A", "B", "C"), qui se situera au sommet de l'arbre, et où chaque appel récursif est inscrit au bout d'une branche sur un niveau inférieur de l'arbre. Tous les appels provenant d'un même algorithme doivent se situer sur un même niveau.
4. (a) Détermine la formule mathématique permettant de calculer le nombre de déplacements nécessaires avec une tour de *n* étages.
 - (b) Vérifie alors le nombre de déplacements donné en introduction dans le cas d'une tour de 64 étages.
 - (c) Quelle fonction mathématique permet de décrire la tendance de la relation entre le nombre d'étages de la tour et le nombre de déplacements ?
 5. Écrire une fonction récursive **hanoi**(*n*, **debut**, **inter**, **fin**) en Python implémentant cet algorithme.

Lors de l'appel **hanoi**(3, "A", "B", "C"), tu dois obtenir l'affichage suivant :

```
Déplace l'étage supérieur de la tour "A" à la tour "C"
Déplace l'étage supérieur de la tour "A" à la tour "B"
Déplace l'étage supérieur de la tour "C" à la tour "B"
Déplace l'étage supérieur de la tour "A" à la tour "C"
Déplace l'étage supérieur de la tour "B" à la tour "A"
Déplace l'étage supérieur de la tour "B" à la tour "C"
Déplace l'étage supérieur de la tour "A" à la tour "C"
```

LA TOUR D'HANOÏ.

Un de nos amis, le professeur N. Claus (de Siam), mandarin du collège Li-Sou-Sïan, a publié, à la fin de l'année dernière, un jeu inédit qu'il a appelé *la Tour d'Hanoï*, véritable casse-tête annamite (fig. 15) qu'il n'a pas rapporté du Tonkin, quoi qu'en dise le prospectus. Cette tour se compose d'étages superposés et décroissants, en nombre variable, représentés par huit pions en bois percés à leur centre, et enfilés dans l'un des trois clous fixés sur une tablette. Le jeu consiste à déplacer la tour en enfilant les pions sur un des deux autres clous et en ne déplaçant qu'un seul étage à la fois, mais avec défense expresse de poser un étage sur un autre plus petit. Le jeu est toujours possible et demande deux fois plus de temps chaque fois que l'on ajoute un étage à la tour. En effet, si l'on sait résoudre le problème pour huit étages, par exemple, en transportant la tour du premier clou au second, on saura le résoudre pour neuf étages. On transporte d'abord les huit étages supérieurs sur le troisième clou; puis le neuvième étage sur le deuxième clou, et enfin sur celui-ci les huit premiers étages. Donc, en augmentant la tour d'un étage, le nombre des coups devient le double, plus un. Ainsi :

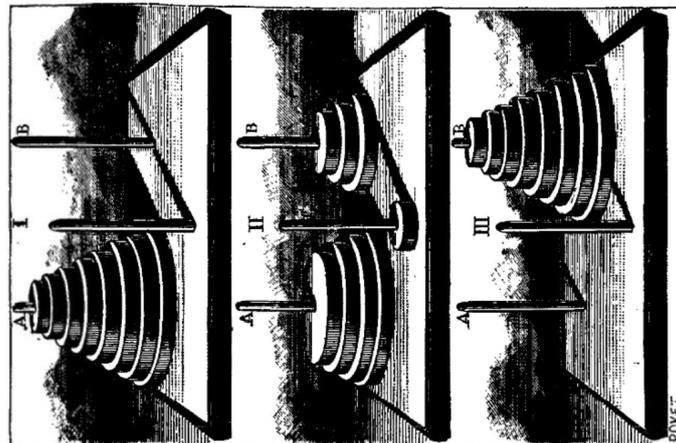
Pour une tour de deux étages, il faut 3 coups au minimum.

trois	—	7
quatre	—	15
cinq	—	31
six	—	63
sept	—	127
huit	—	255

A un coup par seconde, il faut plus de quatre minutes pour tour d'Hanoï à soixante-quatre étages, conformément aux règles

déplacer la tour de huit étages. Pour exécuter le transport de la

Fig. 15.



La tour d'Hanoï.

du jeu, il faudrait faire un nombre de déplacements égal à

$$18\,446\,744\,073\,709\,551\,615;$$

ce qui exigerait plus de cinq milliards de siècles!

Le nombre prodigieux que nous venons d'écrire se retrouve encore dans la théorie du bagueaudier de soixante-quatre anneaux. Ce nombre était connu des Indiens; l'écrivain Asaphad rapporte, en effet, que Sessa, fils de Daher, imagina le jeu des échecs, où le roi, quoique la pièce la plus importante, ne peut faire un pas sans le secours de ses sujets, les pions, dans le but de rappeler au monarque indien Scheran les principes de justice et d'équité avec lesquels il devait gouverner. Scheran, enchanté d'une leçon donnée d'une manière si ingénieuse, promit à l'inventeur de lui donner tout ce qu'il voudrait pour sa récompense. Celui-ci répondit : « Que Votre Majesté daigne me donner un grain de blé pour la première case de l'échiquier, deux pour la seconde, quatre pour la troisième, et ainsi de suite en doublant jusqu'à la soixante-quatrième case. » Il aurait fallu huit fois la superficie de la Terre, supposée entièrement ensemencée, pour avoir en une année de quoi satisfaire au désir du modeste brahmine. Le nombre des grains de blé est égal au nombre de déplacements de la tour d'Hanoï à soixante-quatre étages.



LES BRAHMES TOMBENT!

Le mandarin N. Claus (de Siam) nous raconte qu'il a vu, dans ses voyages pour la publication des écrits de l'illustre Fer-Fer-

E. Lucas. — Récréations mathématiques, III.

Extrait de *Récréations mathématiques* d'Édouard Lucas, publiés entre 1882 et 1894.
<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3945d/f64>