Labyrinthologie

Objectifs :

- Savoir représenter une situation sous forme de graphes.
- Savoir exécuter un algorithme de parcours de graphe en profondeur.

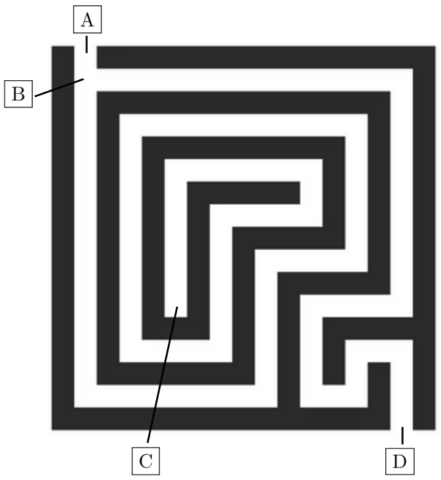
L'intérêt et la fascination millénaire pour les labyrinthes résident dans le fait qu'il ne soit pas facile, voir quasiment impossible, d'en trouver la sortie lorsqu'on s'y perd. Mais c'était sans compter sur la « curiosité » des mathématiciens du XVIII^e et XIX^e siècle, comme *Léonhard Euler* et *Gaston Tarry*. Le premier est connu pour être le père des graphes et le second pour avoir formulé un algorithme de parcours intégral de labyrinthe. C'est ce que nous allons voir ici.

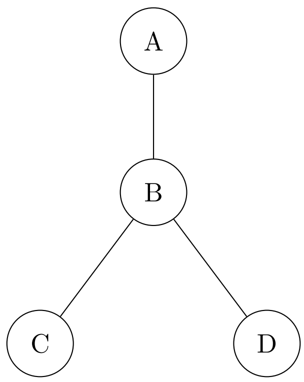
1 Représentation d'un labyrinthe

Tout labyrinthe peut être décrit comme un ensemble de carrefours et de couloirs. Les couloirs servent à relier entre eux les carrefours. Un carrefour qui ne possède qu'un seul couloir est un cul-de-sac.

Si l'on représente les carrefours par des sommets (ou nœuds) et les couloirs par des arêtes, nous obtenons un **graphe**.

Exemple

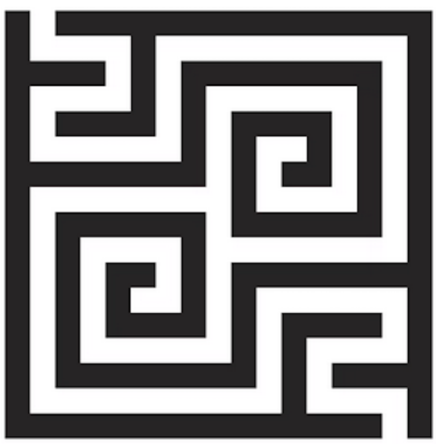




Le carrefour B est relié aux deux entrées/sorties du laryrinthe, A et D, ainsi qu'au cul-de-sac C. On remarque sur le graphe que la longueur et la forme des couloirs n'ont plus aucune importance, tout comme la position des carrefours dans le plan ; seule compte l'information de *voisinage* entre les carrefours.

Travail à faire Représente les deux labyrinthes ci-dessous par un graphe. Quelles différences remarques-tu entre les deux graphes obtenus ?

Labyrinthe A



Labyrinthe B

2 Battue d'un labyrinthe

On considére le cas du *voyageur égaré* dans un labyrinthe, sans en posséder le plan. Dans son malheur, il peut tout de même s'estimer chanceux ; il a pris avec lui un peu d'eau, mais aussi un exemplaire du tome 14 des *nouvelles anales de mathématiques* de 1895 contenant un article de Gaston TARRY initulé « Le problème des labyrinthes » dont voici un extrait :

LE PROBLÈME DES LABYRINTHES;

PAR M. G. TARRY.

Tout labyrinthe peut être parcouru en une seule course, en passant deux fois en sens contraire par chacune des allées, sans qu'il soit nécessaire d'en connaître le plan.

Pour résoudre ce problème, il suffit d'observer cette règle unique :

Ne reprendre l'allée initiale qui a conduit à un carrefour pour la première fois que lorsqu'on ne peut pas faire autrement.

En appliquant l'algorithme « borgne » de Tarry, le *voyageur égaré* pourra non seulement trouver la sortie mais aussi obtenir le plan complet du labyrinthe. Tu vas maintenant incarner ce *voyageur égaré* dans un jeu de rôle.

Travail à faire en binôme

Chaque élève du binôme va jouer, tour à tour, le rôle du *voyageur égaré* et celui du *maître du labyrinthe*.

Règles du jeu

Maître du labyrinthe : il possède le plan du labyrinthe sur lequel il suit la progression du *voyageur égaré*.

Voyageur égaré : il doit explorer l'**intégralité** du labyrinthe et en faire le plan sous la forme d'un **graphe**, au fur et à mesure de son exploration.

Mise en place :

1. le *maître du labyrinthe* choisit au hasard le carrefour de départ (pas forcément une entrée/sortie) ;
2. il demande au *voyageur égaré* de le nommer et reporte son nom sur le plan ;
3. il révèle au *voyageur égaré* tous les couloirs qui partent de ce carrefour ;
4. le *voyageur égaré* reporte sur son carnet de bord les informations.

Déroulement d'un tour de jeu :

1. le *maître du labyrinthe* demande au *voyageur égaré* ce qu'il veut faire :
   - emprunter un nouveau couloir (si il y en a de disponible) ;
   - revenir sur ses pas.
2. Si le *voyageur égaré* a choisi d'emprunter un nouveau couloir, le *maître du labyrinthe* choisit arbitrairement duquel il s'agit sur son plan, en cas de choix multiples. Deux cas peuvent alors se produire :
   - soit le carrefour d'arrivée est nouveau : il demande alors au *voyageur égaré* de le nommer, reporte son nom sur le plan et révèle tous les couloirs qui partent de ce carrefour ;
   - soit le carrefour a déjà été visité, il en informe le voyageur en lui précisant son nom.

Fin du jeu :
Le jeu se termine lorsque le labyrinthe a été battu : tous les couloirs ont été parcouru exactement deux fois en sens contraire, et le *voyageur égaré* est revenu à son point de départ.

Question Après avoir chacun joué le rôle du *voyageur égaré*, analyse le parcours effectué, à la fois sur le graphe et sur le plan du labyrinthe. Quelles remarques pourrais-tu alors formuler sur la « stratégie » de l'algorithme de Tarry ?

Pour « approfondir » Maintenant que tu en possèdes le plan, tu peux connaitre pour chaque carrefour (sommet) du labyrinthe, la liste des carrefours (sommets) auxquels il permet d'accéder directement, c'est à dire ses *voisins* immédiats.

Sur l'exemple du labyrinthe donné en introduction, cela donnerait :

sommet s	liste des voisins de s
A	$[B]$
B	$[A, C, D]$
C	$[B]$
D	$[B]$

Essaie de reformuler en langage naturel l'algorithme de Tarry pour visiter tous les carrefours d'un labyrinthe à partir d'un carrefour de départ quelconque. Tu peux utiliser :

- la liste des voisins de chaque carrefour ;
- un carnet (une liste) dans lequel peut être inscrit les sommets ayant déjà été visités.

L'algorithme pourrait (mais pas nécessairement) commencer comme cela :

```
J'inscris le carrefour de départ dans mon carnet.
…
```

3 Références

Pour approfondir le sujet de la résolution de labyrinthe, voici quelques ressources accessibles en ligne :

- P. TOUGNE, « L'exploration d'un labyrinthe », Dossier Pour la science « Jeux math' », avril/juin 2008, p. 42.
- G. TARRY, « Le problème des labyrinthes », Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 187-190.
- P. ROSENSTIEHL, « Labyrinthologie mathématique (I) », Mathématiques et sciences humaines, tome 33 (1971), p. 5-32.
- É. LUCAS, « Récréations Mathématiques », Volume I, 1882.
- R. KLEIN, T. KAMPHANS, « L'algorithme de Pledge », *https://interstices.info/lalgorithme-de-pledge/*, 25 juin 2010.